**专题15 圆锥曲线的中点弦问题**

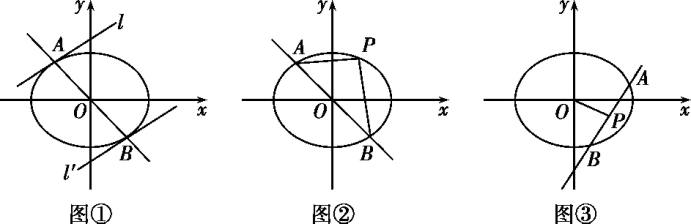
**一、结论**

**1.在椭圆:中:(特别提醒此题结论适用型椭圆)**

**(1)如图①所示,若直线与椭圆交于,两点,过,两点作椭圆的切线,,有,设其斜率为,则.**

**(2)如图②所示,若直线与椭圆交于,两点,为椭圆上异于,的点,若直线,的斜率存在,且分别为,,则.**

**(3)如图③所示,若直线与椭圆交于,两点,为弦的中点,设直线的斜率为,则.**

****

**2.在双曲线:中,类比上述结论有:(特别提醒此题结论适用型双曲线)**

**(1). (2). (3).**

**3.在抛物线：中类比1（3）的结论有.**

**特别提醒：圆锥曲线的中点弦问题常用点差法，但是注意使用点差法后要检验答案是否符合题意；另外也可以通过联立+韦达定理求解.**

**二、典型例题**

1．（2022·内蒙古·海拉尔第二中学高三期末（文））设椭圆的方程为，斜率为*k*的直线不经过原点*O*，而且与椭圆相交于*A，B*两点，*M*为线段*AB*的中点，下列结论正确的是（       ）

A．直线*AB*与*OM*垂直；

B．若直线方程为，则.

C．若直线方程为，则点*M*坐标为

D．若点*M*坐标为，则直线方程为；

【答案】D

【详解】

不妨设坐标为，则,，两式作差可得：

，设，则.

对A：，故直线不垂直，则A错误；

对B：若直线方程为，联立椭圆方程，

可得：，解得，故，

则，故错误；

对：若直线方程为*y*=*x*+1，故可得，即，又，

解得，即，故错误；

**此题对另解，直接利用二级结论，由于本题椭圆方程为，是型椭圆，所以：，故可得，即，又，**

**解得，即，故错误；**

对：若点*M*坐标为,则，则，

又过点，则直线的方程为，即，故正确.

故选：.

**【反思】本题考察椭圆中弦长的求解，以及中点弦问题的处理方法；解决问题的关键是利用点差法，再使用二级结论时，注意先判断椭圆是型还是型，再利用结论求解.**

2．（2021·安徽·淮北师范大学附属实验中学高二期中）已知椭圆的右焦点与抛物线的焦点重合，过点的直线交于、两点， 若的中点坐标为，则的方程为（       ）

A． B．

C． D．

【答案】D

【详解】

解：设、，若轴，则、关于轴对称，不合乎题意，

将、的坐标代入椭圆方程得，两式相减得，

可得，

因为线段的中点坐标为，所以，，，

因为抛物线的焦点为，所以，

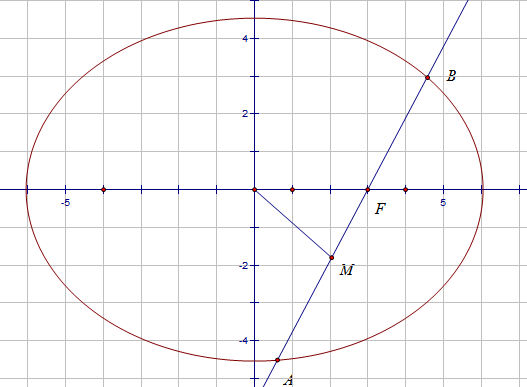
又直线过点，因此，所以，，

整理得，又，解得，，

因此，椭圆的方程为，

故选：D.

**另解：设、，若轴，则、关于轴对称，不合乎题意，因为抛物线的焦点为，所以，所以，设线段的中点坐标为，利用二级结论，又因为，解得，，因此，椭圆的方程为，故选：D.**



**【反思】在圆锥曲线中，涉及到中点弦问题，小题中，常用点差法，也可以直接使用二级结论，但是在解答题中，不建议直接使用二级结论，即使使用点差法，也需检验答案是否符合题意，否则，最后还是需要联立直线与圆锥曲线，再求解.**

3．（2021·湖北·高二阶段练习）已知斜率为的直线与双曲线相交于、两点，为坐标原点，的中点为，若直线的斜率为，则双曲线的离心率为（       ）

A． B． C． D．

【答案】A

【详解】

设、、，则，

两式相减得，所以．

因为，，所以．

因为，，所以，故，

故．

故选：A.

**另解：直接利用双曲线中的二级结论，.**

**【反思】注意使用二级结论的公式，一定要先判断，第一判断曲线是椭圆，还是双曲线，还是抛物线，第二判断圆锥曲线是型，还是型，第三，根据判断选择合适的二级结论，代入计算.**

4．（四川省蓉城名校联盟2021-2022学年高二上学期期末联考理科数学试题）已知抛物线，过其焦点且斜率为1的直线交抛物线于*A*，*B*两点，若线段*AB*的中点的横坐标为3，则该抛物线的准线方程为（       ）

A． B． C． D．

【答案】B

【详解】

解：根据题意，设，

所以①，②，

所以，①②得：，即，

因为直线*AB*的斜率为1，线段*AB*的中点的横坐标为3，

所以，即，

所以抛物线，准线方程为.

故选：B

**【反思】在抛物线：中类比1（3）的结论有，注意到本题的抛物线方程是**，此时中点弦二级结论有**，直接代入，小题都可以用二级结论直接求解，但是注意先判断适用条件.**

5．（2021·江西·南昌市新建区第一中学高二期末（理））已知斜率为的直线与抛物线交于两点，为坐标原点，是线段的中点，是的焦点，的面积等于3，则（       ）

A． B． C． D．

【答案】B

【详解】

由抛物线知：焦点

设

因为是线段的中点，所以

将和两式相减可得：，

即

∵

∴,

.

故选：B

**另解：因为抛物线方程**，设的中点，由中点弦二级结论，可知：**代入：，另焦点**，因为面积，可知，再代入**.**

**【反思】中点弦，最典型的方法就是点差法，在判断条件满足二级结论时，可直接使用二级结论.**

6．（2022·湖北·武汉市第十五中学高二期末）已知椭圆*C*的中心在原点，焦点在*x*轴上，长轴长为4，且点在椭圆上．

(1)经过点*M*（1，）作一直线交椭圆于*AB*两点，若点*M*为线段*AB*的中点，求直线的斜率；

【答案】(1)；.

(1)解：由题设椭圆的方程为

因为椭圆经过点，所以

所以椭圆的方程为.

设，所以，

所以，

由题得，所以，

所以，所以，

所以直线的斜率为,经检验的斜率等于复合题意.

**【反思】在圆锥曲线中，涉及中点弦常用点差法，注意使用点差法，最后需检验，特别是多个答案时，更应该检验，最后保留下符合题意的答案。另外中点弦问题也常联立直线和圆锥曲线，通过韦达定理来求解.特别提醒，解答题中，不能直接使用中点弦的二级结论，解答题中要先证后用.**

8．（2021·甘肃·民勤县第一中学高二阶段练习（理））若直线与抛物线交于*A*、*B*两点，且*AB*中点的横坐标为2，求此直线方程．

【答案】

【详解】

解法一：设、，则由：得：

．

∵直线与抛物线相交，且，则且．

∵*AB*中点横坐标为：，

解得：或（舍去）．

故所求直线方程为：．

解法二：设、，则有．

两式作差得：，即．

，，

,故或．

联立得，

由且得且，故舍去，

则所求直线方程为：．

**【反思】在本题中，涉及中点弦问题，提供了点差法，联立直线与圆锥曲线的方法，注意在解法二中，使用点差法，但是最后的答案出现了或这两个答案，此时必需要检验.**

**三、针对训练 举一反三**

**一、单选题**

1．（2022·江苏溧阳·高二期末）将上各点的纵坐标不变，横坐标变为原来的2倍，得到曲线*C*，若直线*l*与曲线*C*交于*A*，*B*两点，且*AB*中点坐标为*M*（1，），那么直线*l*的方程为（       ）

A． B． C． D．

【答案】A

【详解】

设点为曲线*C*上任一点，其在上对应在的点为，则

，得，

所以，

所以曲线*C*的方程为，

设，则

，

两方程相减整理得，

因为*AB*中点坐标为*M*（1，），

所以，即，

所以，

所以，

所以直线*l*的方程为，即，

故选：A

2．（2022·湖南长沙·高三阶段练习）已知*m*，*n*，*s*，*t*为正数，，，其中*m*，*n*是常数，且*s*＋*t*的最小值是，点*M*(*m*,*n*)是曲线的一条弦*AB*的中点，则弦*AB*所在直线方程为（　　）

A．*x*－4*y*＋6=0 B．4*x*－*y*－6=0

C．4*x*＋*y*－10=0 D．

【答案】D

【详解】

∵，

当且仅当，即取等号，

∴，又，又为正数，

∴可解得．

设弦两端点分别为，则，

两式相减得，

∵，

∴．

∴直线方程为，即．

故选：D．

3．（2021·江苏盐城·高二期末）椭圆中以点为中点的弦所在直线斜率为（       ）

A． B． C． D．

【答案】A

【详解】

设弦的两端点为，，

代入椭圆得

两式相减得，

即，

即，

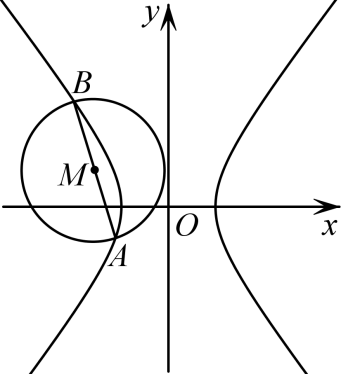
即，

即，

弦所在的直线的斜率为，

故选:A ．

4．（2022·江西南昌·高二期末（理））如图，双曲线*，*是圆的一条直径，若双曲线过，两点，且离心率为，则直线的方程为（       ）



A． B．

C． D．

【答案】D

【详解】

由题意，则，即，由圆方程知，

设，，则，，

又，两式相减得，

所以，

直线方程为，即．

故选：D．

5．（2021·四川·石室中学一模（理））已知双曲线的左、右焦点分别为，，过的直线*l*交双曲线*C*的渐近线于*A*，*B*两点，若，（表示的面积），则双曲线*C*的离心率的值为（       ）

A． B． C． D．或

【答案】D

【详解】

若直线斜率不存在，不妨设点，

则

所以，则离心率；

若直线斜率存在，设，

中点，不妨设*M*在*x*轴上方，

由，得，

故点*M*在圆上，

由，得，

则，所以．

由得，即．

当时，，得．

当时，，矛盾，舍去．

综上所述，或．

故选：D*．*

6．（2022·全国·高三专题练习）设直线与双曲线两条渐近线分别交于点，，若点满足，则该双曲线的渐近线方程是（       ）

A． B．

C． D．

【答案】A

【详解】

由双曲线得到渐近线的方程为

即双曲线的两条渐近线合并为

设,的中点为，则，

两式相减可得，即

     ……………       ①

又点在直线上，则   ……… ②

由,则，则     …………… ③

联立②，③可得，

将代入①可得

所以渐近线的方程为

故选：A

7．（2021·江苏·高三阶段练习）已知*A*，*B*在抛物线上，且线段*AB*的中点为*M*(1，1)，则|*AB*|＝（       ）

A．4 B．5

C． D．

【答案】C

【详解】

由题意，设

线段*AB*的中点为*M*(1，1)

故

且

两式相减得：

故

故直线*AB*的方程为：，即

将直线与抛物线联立：

即



则

故选：C

8．（2021·重庆巴蜀中学高二期中）已知抛物线：，其焦点*F*到准线的距离为2，过焦点*F*且斜率大于0的直线交抛物线于*A*，*B*两点，以*AB*为直径的圆与准线相切于点*Q*，为坐标原点，，则圆的标准方程为（       ）

A． B．

C． D．

【答案】A

【详解】

抛物线的焦点到准线距离为2，则（因为），焦点为，准线方程是，抛物线方程是，

因为直线斜率为正，所以的中点在轴上方，而轴，所以在轴上方，

设，，则，所以（负数舍去），

因此的纵坐标为，

设，，

，两式相减得，

所以，又，，即，

所以圆半径为，

圆方程为．

故选：A．

**二、填空题**

9．（2022·湖南邵东·高二期末）椭圆方程为椭圆内有一点，以这一点为中点的弦所在的直线方程为，则椭圆的离心率为\_\_\_\_\_\_．

【答案】

【详解】

设直线与椭圆交于，则.

因为*AB*中点,则.

又，相减得：.

所以

所以

所以，所以，即离心率.

故答案为：.

10．（2021·黑龙江·大庆中学高二期中）已知椭圆的离心率为，直线*l*与椭圆*C*交于*A*，*B*两点且线段*AB*的中点为，则直线*l*的斜率为\_\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】

【详解】

解：由题意可得，整理可得，

设，则，

两式相减可得，

的中点为，，

则直线斜率.

故答案为：.

11．（2022·上海·复旦附中高二期末）过点作斜率为的直线与双曲线相交于*A*，*B*两点，若*M*是线段的中点，则双曲线的离心率为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】##

【详解】

解：设，，，，则①，②，

是线段的中点，

，，

直线的方程是，

，

过点作斜率为的直线与双曲线相交于，两点，是线段的中点，

①②两式相减可得，即，

．

故答案为：．

12．（2021·全国·高二课时练习）已知双曲线上存在两点关于直线对称，且的中点在抛物线上，则实数的值为\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】0或

【详解】

解：设，，，，的中点为，，则，

由点差法可得，即①，

显然，又因为②，

代②入①可得；

由两点关于直线对称，可得，

所以，又因为，所以，

代入抛物线方程得，

解得或．

故答案为：0或．

13．（2022·四川省南充高级中学高三阶段练习（文））已知双曲线的右焦点为，虚轴的上端点为，点，为上两点，点为弦的中点，且，记双曲线的离心率为，则\_\_\_\_\_\_．

【答案】

【详解】

解法一   由题意知，，则．设，，则两式相减，得．因为的中点为，所以，，又，所以，整理得，所以，得，得．

解法二   由题意知，，则．设直线的方程为，即，代入双曲线方程，得．设，，结合为的中点，得．又，所以，整理得，所以，得，得．

故答案为：